

УДК 620.9

К. В. Аврамов, д-р техн. наук

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ РОТОРОВ В ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ

### Введение

В двигателях внутреннего сгорания широко используются турбинные и компрессорные установки, основным элементом которых является упругий ротор в подшипниках скольжения. В роторных системах часто возникают автоколебания вследствие взаимодействия масляной пленки подшипников скольжения с цапфами роторов. Такие автоколебания привели к разрушению ряда турбинных установок [1]. Поэтому понятен интерес инженеров и исследователей к таким автоколебаниям. Позняк Э.Л. [2] получил аналитические соотношения, описывающие давления в масляной пленке коротких подшипников скольжения. Используя вариационный подход, Олимпиев [3] вывел асимптотическое решение уравнения Рейнольдса. Устойчивость цапфы в подшипнике скольжения рассматривается в монографии [4]. Каринцев И.Б., Шульженко Н.Г. [5] получили модель давлений в масляном слое коротких подшипников скольжения. Они исследовали влияние инерции масляного слоя на величины давлений. Филиппов А.П., Шульженко Н.Г. [6] применяют асимптотические методы для исследования автоколебаний в роторах. Овчарова Д.К., Голоскоков Е.Г. [7] анализируют вынужденные колебания ротора с учетом масляного слоя в коротких подшипниках скольжения. Они описали динамику ротора расчетной схемой, состоящей из упругого вала с тремя дискретными массами.

В этой статье предлагается математическая модель, описывающая автоколебания ротора при его взаимодействии с масляной пленкой коротких подшипников скольжения. Для исследования автоколебаний используется прямое численное интегрирование уравнений движения.

### Постановка задачи и уравнения движения

Рассмотрим динамику жесткого диска, который крепится к вращающемуся упругому валу. Вал находится в двух коротких подшипниках скольжения (рис.1). При колебаниях системы цапфы вала *A* и *B* так же движутся. Эти движения описываются обобщенными координатами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , соответ-

ственно. Рассмотрим ротор в двух одинаковых подшипниках скольжения. В масляном слое этих подшипников возникают усилия, действующие на цапфы. Проекции этих сил на оси *x* и *y* обозначим  $F_x(x_i, y_i); F_y(x_i, y_i); i = \overline{1,2}$ . Предположим, что ротор вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси *z* (рис.1). Тогда угловую скорость диска представим так:

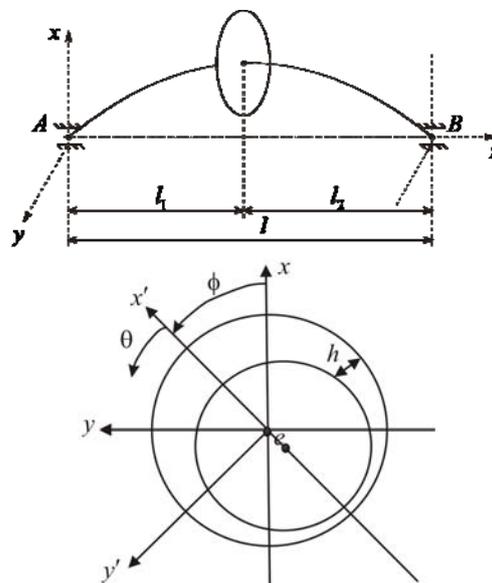


Рис.1. Расчетная схема однодискового ротора в подшипниках скольжения

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3; \quad (1)$$

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3;$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3; \quad \omega_3 = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2,$$

где  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  – орты;  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  – углы поворотов диска. Из условий движения следует, что

$\Omega = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2$ . Тогда кинетическая энергия диска принимает следующий вид:

$$T = \frac{I_e}{2} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2) + \frac{I_p}{2} (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2)^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (2)$$

где  $x, y$  – перемещения точек крепления диска к валу;  $I_e, I_p$  – экваториальный и полярный моменты инерции диска.

Если предположить, что цапфы **A** и **B** покоятся, потенциальная энергия вала примет следующий вид:

$$\Pi = \frac{c_{11}}{2}(x^2 + y^2) + \frac{c_{22}}{2}(\theta_2^2 + \theta_1^2) + c_{12}(x\theta_2 - y\theta_1),$$

где  $c_{11}, c_{22}, c_{12}$  – элементы матрицы жесткости. Если цапфы движутся, потенциальную энергию можно представить так:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}c_{11}[(x - \varsigma_1x_2 - \varsigma_2x_1)^2 + (y - \varsigma_2y_1 - \varsigma_1y_2)^2] + \\ & + \frac{1}{2}c_{22}\left[\left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l}\right)^2 + \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l}\right)^2\right] + \\ & + c_{12}\left[\left(x - \varsigma_1x_2 - \varsigma_2x_1\right)\left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l}\right) - \right. \\ & \left. - (y - \varsigma_2y_1 - \varsigma_1y_2)\left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l}\right)\right]; \varsigma_1 = \frac{l_1}{l}; \varsigma_2 = \frac{l_2}{l}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тогда уравнения движения системы состоят из четырех дифференциальных уравнений, описывающих колебания диска, и четырех условий равновесия цапф:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c_{11}(x - \varsigma_1x_2 - \varsigma_2x_1) + c_{12}\left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l}\right) &= -mg; \\ m\ddot{y} + c_{11}(y - \varsigma_2y_1 - \varsigma_1y_2) - c_{12}\left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l}\right) &= 0; \\ I_e\ddot{\theta}_1 \cos^2 \theta_2 - I_e\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + I_p\ddot{\theta}_3 \sin \theta_2 + \\ + I_p\Omega\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \frac{I_p}{2}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + \\ + I_p\ddot{\theta}_1 \sin^2 \theta_2 + I_p\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + \\ + c_{22}\left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l}\right) - c_{12}(y - \varsigma_2y_1 - \varsigma_1y_2) &= 0; \\ I_e\ddot{\theta}_2 + \frac{I_e}{2}\dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) - I_p\Omega\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + \\ + c_{22}\left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l}\right) + c_{12}(x - \varsigma_1x_2 - \varsigma_2x_1) &= 0; \\ \left(\frac{c_{12}}{l} - \varsigma_2c_{11}\right)(x - \varsigma_1x_2 - \varsigma_2x_1) + \left(\frac{c_{22}}{l} - \varsigma_2c_{12}\right) \times \\ \times \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l}\right) &= F_x(x_1, y_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_{12}}{l} - \varsigma_2c_{11}\right)(y - \varsigma_1y_2 - \varsigma_2y_1) + \left(\varsigma_2c_{12} - \frac{c_{22}}{l}\right) \times \\ \times \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l}\right) &= F_y(x_1, y_1); \\ \left(\varsigma_1c_{11} + \frac{c_{12}}{l}\right)(x - \varsigma_1x_2 - \varsigma_2x_1) + \left(\frac{c_{22}}{l} + \varsigma_1c_{12}\right) \times \\ \times \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l}\right) &= -F_x(x_2, y_2); \\ \left(\frac{c_{22}}{l} + \varsigma_1c_{12}\right)\left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l}\right) - \left(\varsigma_1c_{11} + \frac{c_{12}}{l}\right) \\ (y - \varsigma_2y_1 - \varsigma_1y_2) &= F_y(x_2, y_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Под действием силы тяжести  $mg$  (4) ротор занимает некоторое состояние равновесия, которое определяется следующими значениями обобщенных координат:  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$ . Эти значения удовлетворяют следующей системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} F_x(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = mg \frac{l_2}{l}; F_x(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = mg \frac{l_1}{l}; \\ F_y(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = 0; F_y(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда равновесие диска определяется так:

$$\begin{aligned} \bar{x} = \varsigma_1\bar{x}_2 + \varsigma_2\bar{x}_1 - \frac{mgc_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}; \bar{y} = \varsigma_2\bar{y}_1 + \varsigma_1\bar{y}_2; \\ \bar{\theta}_1 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{l}; \bar{\theta}_2 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{l} + \frac{mgc_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь рассмотрим колебания ротора относительно положения статического равновесия. Для этого введем замену переменных:  $(x, y, \theta_1, \theta_2, x_1, y_1, x_2, y_2) \rightarrow (\bar{x} + x, \bar{y} + y, \bar{\theta}_1 + \theta_1, \bar{\theta}_2 + \theta_2, \bar{x}_1 + x_1, \bar{y}_1 + y_1, \bar{x}_2 + x_2, \bar{y}_2 + y_2)$ . Тогда динамическую систему (4) представим так:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} = R_x^{(1)}; I_e\ddot{\theta}_2 - I_p\Omega\dot{\theta}_1 + R_x^{(2)} = 0; \\ m\ddot{y} = R_y^{(1)}; I_e\ddot{\theta}_1 + I_p\Omega\dot{\theta}_2 - R_y^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} R_y^{(1)} &= \tilde{F}_y(x_1, y_1) + \tilde{F}_y(x_2, y_2); \\ R_x^{(1)} &= \tilde{F}_x(x_2, y_2) + \tilde{F}_x(x_1, y_1); \\ R_y^{(2)} &= l_1\tilde{F}_y(x_1, y_1) - l_2\tilde{F}_y(x_2, y_2); \\ R_x^{(2)} &= -l_2\tilde{F}_x(x_2, y_2) + l_1\tilde{F}_x(x_1, y_1); \\ \tilde{F}_x(x_i, y_i) &= F_x(x_i + \bar{x}_i, y_i + \bar{y}_i) - F_x(\bar{x}_i, \bar{y}_i); \\ \tilde{F}_y(x_i, y_i) &= F_y(x_i + \bar{x}_i, y_i + \bar{y}_i) - F_y(\bar{x}_i, \bar{y}_i); i = 1, 2. \end{aligned}$$

Силы, действующие на цапфы вала со стороны масляного строя (рис.1), представим в следующем виде [2]:

$$[F_x, F_y]^T = - \int_0^{L_B} \int_0^\pi [\cos(\theta + \phi), \sin(\theta + \phi)]^T p(z_1, \theta) R d\theta dz_1, \quad (8)$$

где  $L_B$  – длина подшипника;  $\phi$  – угол линии центров (рис.1). Предполагается, что масляный слой занимает область  $\theta \in [0; \pi]$ . Тогда давления, действующие на цапфу со стороны масляного слоя,  $p(z_1, \theta)$  определяются из уравнения Рейнольдса [2]. Решение этого уравнения представим так:

$$p(z_1, \theta) = \frac{3\mu}{h^3} \left( \Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) (z_1 - L_B) z_1, \quad (9)$$

где  $\mu$  – вязкость масла;  $z_1$  – продольная локальная координата подшипника скольжения;  $h = c + e \cos \theta = c - e(x_1 \cos \phi + y_1 \sin \phi)$ ;  $c$  – величина зазора между цапфой и подшипником. Параметр  $e$  показан на рис.1.

В дальнейшем используем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{c}; \tilde{y}_j = \frac{y_j}{c}; H = \frac{h}{c}; \tau = \Omega t. \quad (10)$$

Тогда силы масляного слоя определяются так:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{L_B^3 \mu R \Omega}{2c^2} \int_0^\pi H^{-3} \cos(\theta + \phi) \{ \tilde{x}_1 \sin(\theta + \phi) - \\ &\tilde{y}_1 \cos(\theta + \phi) - 2\tilde{x}_1' \cos(\theta + \phi) - 2\tilde{y}_1' \sin(\theta + \phi) \} d\theta; \\ F_y &= \frac{L_B^3 \mu R \Omega}{2c^2} \int_0^\pi H^{-3} \sin(\theta + \phi) \{ \tilde{x}_1 \sin(\theta + \phi) - \\ &\tilde{y}_1 \cos(\theta + \phi) - 2\tilde{x}_1' \cos(\theta + \phi) - \\ &- 2\tilde{y}_1' \sin(\theta + \phi) \} d\theta; \left( \cdot \right)' = \frac{d(\cdot)}{d\tau}; \\ H &= 1 - \tilde{x}_1 \cos(\theta + \phi) - \tilde{y}_1 \sin(\theta + \phi). \end{aligned} \quad (11)$$

Определим положение равновесия ротора под действием силы тяжести. В этом случае соотношение (9) представим так:

$$p = - \frac{3\mu \Omega e \sin \theta}{(c + e \cos \theta)^3} z_1 (z_1 - L_B). \quad (12)$$

Уравнения равновесия цапфы принимают следующий вид:

$$F_{x'} = G \cos \phi_e; F_{y'} = -G \sin \phi_e, \quad (13)$$

где  $F_{x'}, F_{y'}$  – проекции сил на оси  $x', y'$ ;  $\phi_e$  – угол линии центров равновесного состояния цапфы;  $G$  – значение вертикального усилия в подшипнике, которое принимает следующее значение в цапфах **A** и **B**:

$$G = mg \frac{l_2}{l}; G = mg \frac{l_1}{l}. \text{ Величины сил масляного слоя}$$

при равномерном вращении ротора представим так:

$$F_{x'} = \frac{L_B^3 \mu R \Omega \varepsilon^2}{c^2 (1 - \varepsilon^2)^2}; F_{y'} = - \frac{\pi L_B^3 \mu R \Omega \varepsilon}{4c^2 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}}; \quad (14)$$

$$\varepsilon = \frac{e}{c}.$$

Из (13, 14) получим нелинейное уравнение для определения  $\varepsilon$ :

$$G = \frac{L_B^3 \mu R \Omega \varepsilon}{4c^2 (1 - \varepsilon^2)^2} \sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon^2)}. \quad (15)$$

Тогда обобщенные координаты равновесного состояния цапфы **A** определяются так:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{1,0} &= \bar{x}_1 c^{-1} = -\varepsilon_1 \cos \phi_{e1}; \tilde{y}_{1,0} = \bar{y}_1 c^{-1} = -\varepsilon_1 \sin \phi_{e1}; \\ \operatorname{tg} \phi_e &= \pi \sqrt{1 - \varepsilon^2} / (4\varepsilon). \end{aligned} \quad (16)$$

Индекс **1** у величин  $\varepsilon$  и  $\phi_e$  обозначает, что эти параметры описывают равновесие цапфы **A**. Аналогичные параметры для цапфы **B** определяются индексом **2**.

Исследуем колебания ротора относительно положения равновесия. Для этого введем следующую замену переменных:

$\tilde{x}_i \rightarrow \tilde{x}_i + \tilde{x}_{i,0}; \tilde{y}_i \rightarrow \tilde{y}_i + \tilde{y}_{i,0}; i = 1, 2$ . Тогда нелинейные силы  $F_x, F_y$ , действующие на цапфы масляного слоя представим так:

$$\begin{aligned} F_x &= \gamma (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0} - 2\tilde{y}_1') J_3 - \gamma (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0} + 2\tilde{x}_1) J_1; \\ F_y &= \gamma (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0} - 2\tilde{y}_1') J_2 - \gamma (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0} + 2\tilde{x}_1) J_3, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$J_1 = \int_{\phi_{e1}}^{\pi + \phi_{e1}} \frac{\cos^2 \vartheta}{H_1^3(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)} d\vartheta; J_2 = \int_{\phi_{e1}}^{\pi + \phi_{e1}} \frac{\sin^2 \vartheta}{H_1^3(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)} d\vartheta; \quad (18)$$

$$J_3 = \int_{\phi_{e1}}^{\pi + \phi_{e1}} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{H_1^3(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)} d\vartheta;$$

$$H_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = 1 - (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0}) \cos \vartheta - (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0}) \sin \vartheta;$$

$$\gamma = \frac{L_B^3 \mu R \Omega}{2c^2}.$$

Нелинейные силы (17) представим в виде степенных рядов по  $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_1', \tilde{y}_1'$ . Для этого интегралы (17) представим в виде степенных рядов, используя степенной ряд:

$$H^{-3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = A_0(\vartheta) + A_1(\vartheta)\tilde{x}_1 + A_2(\vartheta)\tilde{y}_1 + A_3(\vartheta)\tilde{x}_1^2 + \dots \quad (19)$$

Теперь ряд (19) введем в (18) и произведем интегрирования. В результате интегралы  $J_1, J_2, J_3$  получаются в виде степенных рядов. Эти интегралы вводятся в нелинейные силы (17). В результате эти силы представляются в виде степенных рядов:

$$\begin{aligned}
 F_X &= F_{X,0} + F_{X,1}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + \\
 &+ F_{X,2}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{X,3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + \dots; \\
 F_Y &= F_{Y,0} + F_{Y,1}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + \\
 &+ F_{Y,2}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{Y,3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + \dots
 \end{aligned} \quad (20)$$

где  $F_{X,0}; F_{Y,0}$  – постоянные части сил масляного слоя;  $F_{X,1}; F_{Y,1}$  – линейные части сил относительно обобщенных координат и скоростей цапфы  $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1$ ;  $F_{X,2}; F_{Y,2}; F_{X,3}; F_{Y,3}$  – нелинейные части сил второго и третьего порядка относительно обобщенных координат и скоростей. Линейные части сил определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 F_{X,1} &= \left( \frac{\partial F_X}{\partial \tilde{x}_1} \right)_0 \tilde{x}_1 + \left( \frac{\partial F_X}{\partial \tilde{y}_1} \right)_0 \tilde{y}_1 + \left( \frac{\partial F_X}{\partial \tilde{x}'_1} \right)_0 \tilde{x}'_1 + \\
 &+ \left( \frac{\partial F_X}{\partial \tilde{y}'_1} \right)_0 \tilde{y}'_1; \\
 F_{Y,1} &= \left( \frac{\partial F_Y}{\partial \tilde{x}_1} \right)_0 \tilde{x}_1 + \left( \frac{\partial F_Y}{\partial \tilde{y}_1} \right)_0 \tilde{y}_1 + \left( \frac{\partial F_Y}{\partial \tilde{x}'_1} \right)_0 \tilde{x}'_1 + \\
 &\left( \frac{\partial F_Y}{\partial \tilde{y}'_1} \right)_0 \tilde{y}'_1,
 \end{aligned} \quad (21)$$

где символ  $\left( \frac{\partial F_X}{\partial \tilde{x}_1} \right)_0$  обозначает производную,

которая определяется в точке  $\tilde{x}_1 = \tilde{y}_1 = \tilde{x}'_1 = \tilde{y}'_1 = 0$ .

Эти производные принимают следующие значения:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial F_X}{\partial \tilde{x}_1} \right)_0 &= J_4 + \tilde{x}_{1,0} J_x^{(1)} - \tilde{y}_{1,0} J_x^{(2)}; \\
 \left( \frac{\partial F_X}{\partial \tilde{y}_1} \right)_0 &= -J_5 + \tilde{x}_{1,0} J_y^{(1)} - \tilde{y}_{1,0} J_y^{(2)}; \\
 \left( \frac{\partial F_Y}{\partial \tilde{x}_1} \right)_0 &= J_6 + \tilde{x}_{1,0} J_x^{(3)} - \tilde{y}_{1,0} J_x^{(1)}; \\
 \left( \frac{\partial F_Y}{\partial \tilde{y}_1} \right)_0 &= -J_4 + \tilde{x}_{1,0} J_y^{(3)} - \tilde{y}_{1,0} J_y^{(1)}; \\
 \left( \frac{\partial F_X}{\partial \tilde{x}'_1} \right)_0 &= -2J_5; \quad \left( \frac{\partial F_X}{\partial \tilde{y}'_1} \right)_0 = -2J_4; \quad \left( \frac{\partial F_Y}{\partial \tilde{x}'_1} \right)_0 = -4J_4; \\
 \left( \frac{\partial F_Y}{\partial \tilde{y}'_1} \right)_0 &= -2J_6;
 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} J_x^{(1)} \\ J_y^{(1)} \end{bmatrix} = \gamma \int_{\phi_{e1}}^{\phi_{e1}+\pi} \begin{bmatrix} r_x(\vartheta) \\ r_y(\vartheta) \end{bmatrix} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta;$$

$$\begin{bmatrix} J_x^{(2)} \\ J_y^{(2)} \end{bmatrix} = \gamma \int_{\phi_{e1}}^{\phi_{e1}+\pi} \begin{bmatrix} r_x(\vartheta) \\ r_y(\vartheta) \end{bmatrix} \cos^2 \vartheta d\vartheta;$$

$$\begin{bmatrix} J_x^{(3)} \\ J_y^{(3)} \end{bmatrix} = \gamma \int_{\phi_{e1}}^{\phi_{e1}+\pi} \begin{bmatrix} r_x(\vartheta) \\ r_y(\vartheta) \end{bmatrix} \sin^2 \vartheta d\vartheta;$$

$$r_x(\vartheta) = \left( \frac{\partial H_1^{-3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)}{\partial \tilde{x}_1} \right)_0; \quad r_y(\vartheta) = \left( \frac{\partial H_1^{-3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)}{\partial \tilde{y}_1} \right)_0.$$

Квадратичные и кубические части  $F_{X,2}; F_{X,3}; F_{Y,2}; F_{Y,3}$  определялись с помощью пакета символьных вычислений Maple.

Отметим, что силы масляного слоя (18, 19) выражаются через обобщенные координаты цапф. Для упрощения уравнений движения ротора (7) и дальнейшего анализа выразим эти силы через обобщенные координаты диска. Для этого воспользуемся четырьмя алгебраическими уравнениями системы (4). В этих уравнениях отбросим нелинейные слагаемые и представим их в следующей матричной форме:

$$[R]q = [\tilde{D}]q_1, \quad (23)$$

$$r_{11} = -2\zeta_2 c_{12} l^{-1} + \zeta_2^2 c_{11} + c_{22} l^{-2};$$

$$r_{12} = (\zeta_2 - \zeta_1) c_{12} l^{-1} + \zeta_1 \zeta_2 c_{11} - c_{22} l^{-2};$$

$$r_{32} = \zeta_1^2 c_{11} + 2\zeta_1 c_{12} l^{-1} + c_{22} l^{-2};$$

$$q = [x, \theta_1, y, \theta_2]^T; \quad q_1 = [\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1]^T;$$

$$[\tilde{D}] =$$

$$\begin{bmatrix} \gamma \bar{K}_{11}^{(x)} - cr_{11} & \gamma \bar{K}_{12}^{(x)} & -cr_{12} & 0 \\ \gamma \bar{K}_{11}^{(y)} & \gamma \bar{K}_{12}^{(y)} - cr_{11} & 0 & -cr_{12} \\ cr_{12} & 0 & cr_{32} - \gamma \bar{K}_{11}^{(x)} & -\gamma \bar{K}_{12}^{(x)} \\ 0 & -cr_{12} & \gamma \bar{K}_{11}^{(y)} & \gamma \bar{K}_{12}^{(y)} - cr_{32} \end{bmatrix};$$

$$[R] =$$

$$\begin{bmatrix} l^{-1} c_{12} - \zeta_2 c_{11} & 0 & 0 & l^{-1} c_{22} - \zeta_2 c_{12} \\ 0 & c_{12} \zeta_2 - c_{22} l^{-1} & l^{-1} c_{12} - \zeta_2 c_{11} & 0 \\ c_{11} \zeta_1 + c_{12} l^{-1} & 0 & 0 & l^{-1} c_{22} + c_{12} \zeta_1 \\ 0 & l^{-1} c_{22} + c_{12} \zeta_1 & -c_{11} \zeta_1 - c_{12} l^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь из соотношений (20) выразим вектор  $q_1$  и введем его в значения сил масляного слоя (20).

Теперь уравнение движения ротора (7) представим в следующем виде:

$$[M]\ddot{q} + [G]\dot{q} = [K_1]q + [D_1]q' + W(q_1, q'_1), \quad (24)$$

где  $[M] = \text{diag}(m, I_e, m, I_e)$ ;  $[G]$  – матрица гироскопических сил;  $[K_1]$  – матрица линейной части упругих сил масляной пленки;  $[D_1]$  – матрица линейной части диссипативных сил масляной пленки;  $W = (w_1, \dots, w_4)^T$  – вектор нелинейной части сил мас-

ляной пленки;  $q' = \frac{dq}{d\tau}$ . Окончательно, система (7)

принимает следующий вид:

$$\ddot{q} + [F]\dot{q} + [Q]q = \tilde{W}(q, \dot{q}); \quad (25)$$

$$[F] = [M]^{-1}([G] - [D_1]\Omega^{-1}); [Q] = -[M]^{-1}[K_1];$$

$$\tilde{W}(q, \dot{q}) = [M]^{-1}W(q_1, \dot{q}_1) = [M]^{-1}W(q_1, \Omega^{-1}\dot{q}_1) = \text{где}$$

$$= [M]^{-1}W(\tilde{D}^{-1}Rq, \Omega^{-1}\tilde{D}^{-1}R\dot{q}),$$

$$[F] = \|f_{ij}\|_{j=1,4}^{i=1,4}; [Q] = \|\tilde{Q}_{ij}\|_{j=1,4}^{i=1,4}; \tilde{W} = [\tilde{W}_1, \dots, \tilde{W}_4].$$

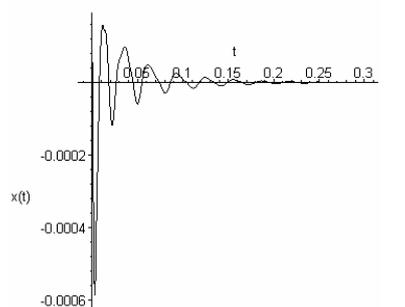
### Численное моделирование колебаний

Рассмотрим автоколебания ротора со следующими параметрами [8]:

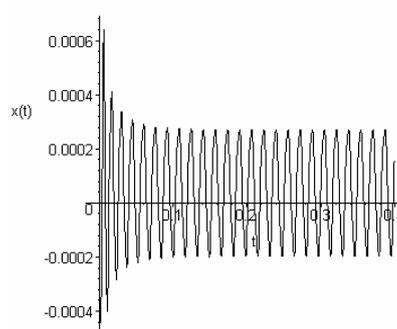
$$\begin{aligned} R &= 0.057 \text{ м}; \mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}; \\ L_B &= 28.5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; c = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \\ m &= 374 \text{ кг}; l_1 = 0.5 \text{ м}; \\ l_2 &= 0.648 \text{ м}; I_p = 28.4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; I_e = 14.2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\ E &= 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}; J = 8.29 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4. \end{aligned} \quad (26)$$

Собственная частота прямой прецессии этого ротора имеет следующее численное значение:  $\Omega_{*,1} = 394 \text{ рад/с}$ . Угловая скорость, при которой ротор теряет устойчивость равномерного вращения, составляет  $\tilde{\Omega} = 2110 \text{ рад/с}$ . Итак, при  $\Omega < \tilde{\Omega}$  равномерное вращение ротора устойчиво, а неустойчиво в противном случае. При  $\Omega = \tilde{\Omega}$  наблюдается бифуркация Хопфа. Вследствие этой бифуркации рождается предельный цикл. Для исследования таких предельных циклов используется прямое численное моделирование системы (25). Оно производилось при различных частотах вращения ротора. Результаты расчетов представлены на рис.2, где показаны колебания ротора при следующих значениях частот его вращения: а).  $\Omega = 300 \text{ рад/с}$ ; б).  $\Omega = 1000 \text{ рад/с}$ ; в).  $\Omega = 1300 \text{ рад/с}$ ; г).  $\Omega = 2150 \text{ рад/с}$ . При частоте вращения ротора  $\Omega = 300 \text{ рад/с}$  (рис.2а) автоколебания ротора не возбуждаются. В этом случае наблюдается короткий переходной процесс, приводящий к режиму равномерного вращения ротора. При  $\Omega = 1000 \text{ рад/с}$  наблюдаются автоколебания ротора. Отметим, что эти автоколебания быстро устанавливаются, то есть переходной процесс наблюдается на коротком интервале времени. С увеличением частоты

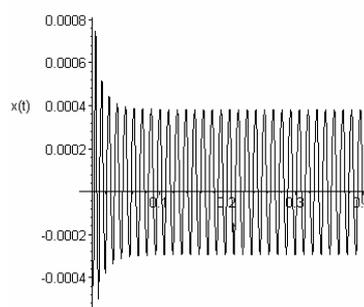
вращения ротора, амплитуды автоколебаний растут.



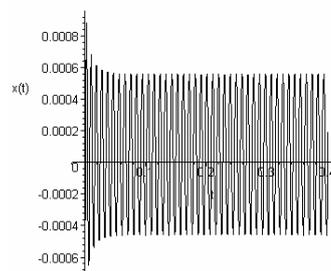
а)



б)



в)



г)

Рис 2. Автоколебания ротора при следующих значениях частоты вращения: (а)  $\Omega = 300$ ; (б)  $\Omega = 1000$ ; (в)  $\Omega = 1300$ ; (г)  $\Omega = 2150$

Численные данные (рис.2) показывают быстрое затухание переходных процессов, что свидетельствует о существенном демпфировании колебаний в масляной пленке. Подчеркнем, что ротор теряет устойчивость при  $\tilde{\Omega} = 2110 \text{ рад/с}$ , а режим автоколебаний наблюдается как при меньших, так и больших частотах вращения. Это свидетельствует о жестком возбуждении автоколебаний в рассматриваемой системе.

**Список литературы:**

1. Zhang X. Y. On site testing and analysis of the oil whirl phenomena in national made 200MW stream turbine generator systems / X. Y. Zhang // Power Industry. – 1992. – №12. – P.32-37. 2. Позняк Э. Л. Неустойчивые колебания роторов на подшипниках скольжения / Э.Л.Позняк // Динамика гибких

роторов. – 1972. – С. 22-29. 3. Олимпиев В. И. О собственных частотах ротора на подшипниках скольжения / В.И.Олимпиев // Известия АН СССР. – 1960. – №3 – С.24-29. 4. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов / Тондл А. – Л.: “Энергия”, 1971. – 386 с. 5. Каринцев И.Б. Статические и динамические характеристики масляной пленки коротких подшипников скольжения/И.Б.Каринцев, Н.Г.Шульженко // Динамика и прочность машин. – Харьков. – 1972. – Вып. 16. – С.14-18. 6. Филиппов А.П. Устойчивость колебаний ненагруженного неуравновешенного ротора в коротких опорах жидкостного трения / А.П.Филиппов, Н.Г. Шульженко // Машиноведение. – 1973. – №4. – С. 21-28. 7. Овчарова Д.К. Вынужденные колебания ротора на подшипниках скольжения / Д.К.Овчарова, Е.Г. Голоскоков // Прикладная механика. – 1975. – №11. – С. 95-99. 8. Ping J.J. On the nonlinear dynamic behavior of a rotor-beam ring system / J.J. Ping, M.Guang, Yi S. Song // Journal of Sound and Vibration. – 2004. – № 274. – P.1031-1044.

УДК 621.43

**А.И. Крайнюк, канд. техн. наук, С.В. Алексеев, инж., С.А. Столяров, инж.**

**ДВУХСТУПЕНЧАТЫЙ КОМПРЕССОР КАСКАДНОГО ОБМЕНА ДАВЛЕНИЕМ**

Развитие пневмотранспорта сыпучих грузов, технологических пневмоагрегатов дорожно-строительной и специальной техники предполагает снижение себестоимости при получении сжатого воздуха. Нагнетание воздуха дорогостоящими и сложными по конструкции поршневыми или лопаточными компрессорами, особенно с автономным, например, дизельным, приводом характеризуется большой энергозатратностью. Коэффициент полезного действия компрессора с дизельным двигателем, с учетом потерь преобразования исходной тепловой энергии в механическую в дизеле и механической энергии в располагаемую работу сжатия воздуха, в лучших образцах не превышает значений 0,2 ... 0,21

Значительный резерв снижения энергозатратности при получении сжатого воздуха и упрощения конструкции нагнетателя связывается с использованием устройств прямого преобразования тепловой энергии в сжатый воздух на базе каскадного обменника давления (КОД). Агрегаты, реализующие каскадное сжатие, представляют собой новую разновидность обменников давления, в частности апробируемых в системах наддува двигателей внутреннего сгорания. Сжатие воздуха в КОД, как и в волновом обменнике давления известной системы наддува «Comprex», осуществляется в результате непосредственного контакта со сжимающими газами, однако

с существенным отличием организации рабочего процесса. Принцип действия КОД изложен в работах [1, 2, 3].

Типичная конструкция обменника (рис. 1.) представляет собой ротор с продольными напоробменными ячейками, вращающийся в статоре, в одной из торцевых крышек которого (А), расположены массообменные каналы, а также окна подвода и отвода сжимающего газа, в другой (В) – окна подвода и отвода сжимаемого воздуха. Ротор приводится во вращение с частотой 2000...3000 мин<sup>-1</sup> при помощи электродвигателя или другого привода незначительной мощности. Фотографии основных узлов одной из конструкции КОД показаны на рис. 2.

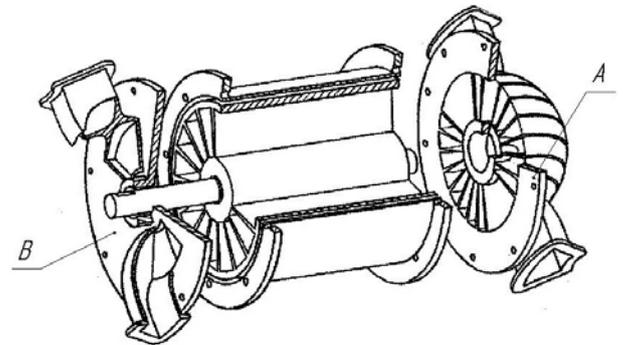


Рис.1 . Общий вид каскадного обменника давления