УДК 621.746.62:001.1 (075.8)

Л.П. Клименко, Л.М. Дихта, В.І. Андрєєв

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ ЛИТТІ В МЕТАЛЕВИЙ КОКІЛЬ КОРОТКОГО ПОРОЖНИННОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ВИЛИВКА

Здійснено математичне моделювання теплових процесів, пов'язаних зі зняттям перегріву розплаву, твердінням та наступним охолодженням порожнинного циліндричного виливка, виготовленого методом відцентрового лиття в металевий кокіль. У роботі математичне моделювання зазначених процесів зведено до розв'язку низки крайових задач теорії теплопровідності. Деякі з істотних математичних труднощів, зумовлених наявністю рідкого ядра і рухомих фронтів кристалізації, чи складною геометрією областей тощо подолано шляхом залучення фундаментальної концепції калориметричної температури, підтвердженої неодноразово як теоретично, так і експериментально.

Загальна постановка задачі

Керування тепловими процесами кристалізації та охолодження при литті металевого виливка із заданими геометрією (форма, розміри) і хімічним складом є чи не єдиним способом впливу на його майбутні механічні якості та зернисту структуру. Оскільки експериментальне дослідження вказаних процесів в силу низки причин об'єктивного характеру на сьогоднішній день представляється дещо проблематичним, то перевагу слід надати теоретичним методам дослідження як більш реалістичним і доцільним.

Метою даної роботи є створення математичної моделі теплових процесів кристалізації та охолодження короткого порожнинного циліндричного виливка при виготовленні його методом відцентрового лиття в металевий кокіль. Досягнення мети здійснюється при залученні фундаментальних здобутків вітчизняної науки про формування виливка (концепція калориметричної температури та метод еквівалентного виливка) [2,5], а отримані при цьому результати слід вважати узагальненням результатів нашої попередньої роботи [3].

Задача моделювання теплових процесів кристалізації та охолодження порожнинного циліндричного виливка зводиться до опису нестаціонарних температурних полів T_1 – виливка і T_2 – кокілю на часовому проміжку, що містить такі стадії [2] формування виливка, як зняття перегріву розплаву, його кристалізацію при сталій температурі (чистий метал) і охолодження затверділого виливка до заданої температури в кокілі, якщо відомими є: висота $2h$ виливка, радіуси R_0 внутрішньої і R_1 зовнішньої його поверхні, товщина $l_1 = R_1 - R_0$ стінки виливка та l_2 – стінки кокілю; масові густини ρ_1 – виливка й ρ_2 – кокілю; теплоємності матеріалу c_1 – виливка й c_2 – кокілю; теплопровідності λ_1 – виливка й λ_2 – кокілю; теплопровідність λ і товщина ε ізоляційної фарби, що запобігає безпосередньому контакту виливка й кокілю; температура середовища T_{01} усередині порожнини виливка й T_{02} – ззовні кокілю ($T_{01} \neq T_{02}$); температура розплаву T_{10} у момент його миттєвого заповнення кокілю й температура T_{20} самого кокілю; коефіцієнти тепловіддачі α_{01} – на внутрішній поверхні виливка й α_{02} – на зовнішній поверхні кокілю; температура T_{cr} кристалізації чистого металу; питома теплота L кристалізації розплаву. Виливок і кокіль є складовими елементами єдиної взаємодіючої із зовнішнім середовищем нестаціонарної теплофізичної системи, до того ж сам виливок у процесі кристалізації підрозділяється на області із різним агрегатним станом: рідке ядро й фронти кристалізації (чистий метал), що утворюють замкнену поверхню і рухаються назустріч один одному з внутрішньої порожнини виливка і з боку кокілю. Ця поверхня фронтів кристалізації відокремлює рідке ядро від затверділих ділянок виливка.

Спрощення розглядуваної задачі досягається шляхом: прийняття концепції про калориметричну температуру [1,2,5], що надає можливість роз'єднати вихідну теплофізичну систему на окремі складові (виливок і кокіль), температурні поля яких описуються незалежно; завдання граней поверхні фронтів, яка розмежовує рідке ядро і затверділу частину виливка у вигляді площин [2,5]; припущення, що має місце осесиметричний випадок температурних полів виливка і кокілю і що існує перпендикулярна до осі обертання площина симетрії, яка ділить навпіл і виливок, і кокіль.

Математичне формулювання задачі

Введемо у розгляд циліндричну систему координат (r, φ, z), початок якої розмістимо в точці перетину площини симетрії і осі обертання, з якою сумістимо вісь Oz. Для надання одержуваним результатам більшої загальності та зручності при проведенні обчислень представляється доцільним від розмірних перейти до безрозмірних величин θ, $\bar{r}$, $\bar{z}$ і τ за формулами

$$\theta = \frac{T - T_{02}}{T_{cr} - T_{02}}, \qquad (1)$$

$$\bar{r} = r / l_j, \quad \bar{z} = z / l_j, \quad \tau = a_j t / l_j^2,$$

де T – температура (з відповідними індексами); j = 1, 2; a_j - температуропровідності матеріалу (виливка чи кокілю, j = 1 чи 2); lj – масштаб лінійних величин відповідної задачі; t – розмірний час.

Заради простоти письма та запобігання введення нових позначень умовимося горизонтальну риску над символами опускати, частинні похідні функцій за просторовими змінними позначати відповідними літерами у вигляді індексів, а похідну за часом – крапкою над символом.

Розподілимо часовий інтервал кристалізації розплаву й охолодження затверділого виливка в кокілі в такий спосіб: τ = 0 – миттєве заливання розплаву в кокіль, τ_1 – момент закінчення зняття перегріву, τ_2 – момент кінця затвердіння виливка, τ_3 – момент видалення охолодженого до заданої температури виливка з кокілю.

Крайова задача про кристалізацію розплаву допускає наступне формулювання: визначити температурне поле виливка в процесі його твердіння як розв’язок рівняння теплопровідності

$$\dot{\theta}_1 = \theta_{1rr} + \frac{1}{r}\theta_{1r} + \theta_{1zz}, \qquad (2)$$

$$\tau_1 < \tau < \tau_2, \quad (r, z) \in D_S;$$

$$\theta_1 = 1, \quad (r, z) \in D_K,$$

який задовольняє граничні умови

$$\theta_{1r} + B_{01}\theta_1 = B_{01}\theta_{01},$$
$$\text{при} \quad r = R_0, \quad 0 < z < h;$$
$$\theta_{1r} + B_{21}\theta_1 = B_{21}\theta_c,$$
$$\text{при} \quad r = R_1, \quad 0 < z < h;$$
$$\theta_{1z} + B_{221}\theta_1 = B_{221}\theta_c,$$
$$\text{при} \quad R_0 < r < R_1, \quad z = h; \qquad (3)$$
$$\theta_{1r} - L_0\dot{\xi}_0 = 0,$$
$$\text{при} \quad r = R_0 + \xi_0, \quad 0 < z < h - \zeta;$$
$$\theta_{1r} + L_1\dot{\xi}_1 = 0,$$
$$\text{при} \quad r = R_1 - \xi_1, \quad 0 < z < h - \zeta;$$
$$\theta_{1z} - L_0\dot{\zeta} = 0,$$
$$\text{при} \quad R_0 + \xi_0 < r < R_1 - \xi_1, \quad z = h - \zeta;$$

та початкові умови при $\tau = \tau_1$

$$\theta_1 = 1, \quad (r, z) \in D_1;$$
$$\xi_0 = 0, \quad r = R_0, \quad 0 < z < h;$$
$$\xi_1 = 0, \quad r = R_1, \quad 0 < z < h; \qquad (4)$$
$$\zeta = 0, \quad R_0 < r < R_1, \quad z = h.$$

В співвідношеннях (2) – (4) прийнято наступні позначення: D_K, D_S – відповідно, рідке ядро та затверділа частина виливка D_1; ξ_0, ξ_1, ζ - лінії, що розмежовують області D_K і D_S; B_{01}, B_{21} та B_{221} – числа Біо; L_0, L_1 – допоміжні величини, пов’язані з теплотою L кристалізації розплаву. Зазначимо, що між деякими з перелічених величин існує зв'язок [2]

$$D_1 = \{(r, z) \mid R_0 < r < R_1, \ 0 < z < h\},$$
$$D_1 = D_S \cup D_K, \quad D_S = D_1 \setminus D_K,$$
$$D_K = \{(r, z) \mid R_0 + \xi_0 < r < R_1 - \xi_1, \ 0 < z < h - \zeta\};$$
$$B_{01} = \frac{\alpha_{01}R_0}{\lambda_1}, \ B_{21} = \frac{\alpha_{21}R_1}{\lambda_1}, \ B_{221} = \frac{\alpha_{21}h}{\lambda_1}, \qquad (5)$$
$$\alpha_{21} = \beta\frac{\theta_{cr} - \theta_{02}}{\theta_{cr} - \theta_c}, \ \beta = \frac{\lambda}{\varepsilon};$$
$$L_0 = \frac{L_{00}}{\theta_{cr} - \theta_{01}}, \quad L_1 = \frac{L_{00}}{\theta_{cr} - \theta_c}, \quad L_{00} = \frac{L}{c_1(T_{cr} - T_{02})}.$$

Крайова задача про охолодження в кокілі затверділого виливка формулюється цілком аналогічним чином: визначити температурне поле затверділого виливка в процесі його охолодження в кокілі як розв’язок рівняння теплопровідності

$$\dot{\theta}_1 = \theta_{1rr} + \frac{1}{r}\theta_{1r} + \theta_{1zz}, \qquad (6)$$
$$\tau_2 < \tau < \tau_3, \quad (r, z) \in D_1,$$

який задовольняє граничні умови

$$\theta_{1r} + B_{01}\theta_1 = B_{01}\theta_{01},$$
$$\text{при} \quad r = R_0, \quad 0 < z < h;$$
$$\theta_{1r} + B_{21}\theta_1 = B_{21}\theta_c,$$
$$\text{при} \quad r = R_1, \quad 0 < z < h; \qquad (7)$$
$$\theta_{1z} + B_{221}\theta_1 = B_{221}\theta_c,$$
$$\text{при} \quad R_0 < r < R_1, \quad z = h;$$

та початкову умову при $\tau = \tau_2$

$$\theta_1 = \vartheta(r, z), \quad (r, z) \in D_1, \qquad (8)$$

де $\vartheta(r, z)$ – розв’язок крайової задачі (2) – (4) в момент часу $\tau = \tau_2$, який відповідає кінцю затвердіння виливка.

За геометрією область кокілю є дещо складнішою (шестикутник), ніж виливок (прямокутник). Тому з погляду подальшого використання цієї області при побудові теплового поля кокілю представляється доцільним подати її у вигляді об’єднання двох прямокутників

$$D_2 = D_{21} \cup D_{22},$$
$$D_{21} = \{(r, z) \mid r_0 < r < R_1, \ h < z < h_1\}, \qquad (9)$$
$$D_{22} = \{(r, z) \mid R_1 < r < R_2, \ 0 < z < h_1\},$$

з лінією s, що розмежовує ці прямокутники

$$s = \{(r, z) \mid r = R_1, \ h < z < h_1\}, \qquad (10)$$

причому у виписаних формулах через h_1 та R_2 позначено, відповідно, піввисоту та зовнішній радіус поверхні кокілю, а через r_0 – радіус кругового отвору в кришці кокілю.

Позначимо точками A_j, j = 0, 1, …, 5, вершини

$$A_0(r_0, h),\ A_1(R_1, h),\ A_2(R_1, 0),$$
$$A_3(R_2, 0),\ A_4(R_2, h_1),\ A_5(r_0, h_1); \qquad (11)$$

шестикутника D_2, а його сторони s_j, j = 1, 2, …, 6, визначимо за допомогою вершин наступним чином

$$s_j = A_{j-1}A_j,\ j = 1, 2, \dots, 5. \quad s_6 = A_5A_0. \qquad (12)$$

Якщо через $A_3^{'}(R_1, h_1)$ позначити проекцію точки A_3 на сторону s_5, то лінію s, визначену формулою (10), можна записати як $s = A_3A_3^{'}$.

Крайова задача про нагрівання кокілю в процесі зняття перегріву розплаву, кристалізації. твердіння та охолодження в кокілі виливка формулюється так: визначити в області D_2 температурне поле кокілю як розв'язок рівняння теплопровідності

$$\dot{\theta}_2 = k\left(\theta_{2rr} + \frac{1}{r}\theta_{2r} + \theta_{2zz}\right), \quad k = \frac{a_2}{a_1}, \qquad (13)$$

$$0 < \tau < \tau_3, \quad (r, z) \in D_2,$$

який задовольняє граничні умови

$$\theta_{2n} + B_{12}\theta_2 = B_{12}\theta_c \text{ на } s_1,\ s_2;$$
$$\theta_{2n} = 0 \text{ на } s_3; \qquad (14)$$
$$\theta_{2n} + B_{02}\theta_2 = B_{02}\theta_c \text{ на } s_4,\ s_5,\ s_6;$$

$$B_{02} = \frac{\alpha_{02} l_2}{\lambda_2},\ B_{12} = \frac{\alpha_{12} l_2}{\lambda_2},\ \alpha_{12} = \frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\theta_{cr} - \theta_{02}}{\theta_c - \theta_{02}},$$

де індексом n позначено похідну по зовнішній до області D_2 нормалі, а символами B_{02} та B_{12} – відповідні числа Біо;

та початкову умову при при $\tau = 0$

$$\theta_2 = \theta_{20}, \quad (r, z) \in D_2. \qquad (15)$$

В формулах (13) – (15) використано попередньо прийняті позначення.

Калориметрична температура

У першому наближенні при використанні масивного кокілю калориметричну температуру можна вважати сталою і визначати у відповідності з рекомендаціями А.І. Вейника [2,5] за відомою формулою

$$\theta_c = \frac{\theta_{10} + m\theta_{20} + L_{00}}{1+m}, \quad m = \frac{m_2}{m_1}, \qquad (16)$$

де через m_1 та m_2 позначено, відповідно, масу виливка та кокілю.

Зняття перегріву розплаву

Прийнято вважати [2,5], що при знятті перегріву розплаву теплове поле виливка не залежить від просторових змінних, а є функцією тільки часу, особливо у випадку миттєвого заповнення розплавом форми. Поточну безрозмірну температуру θ розплаву при такому підході слід обчислювати за формулою [2,5]

$$\theta = \theta_{10}\exp(-\omega\tau), \qquad (17)$$

$$\omega = \frac{1}{R_1^2}\left(B_{01} + B_{21} + \frac{1-\kappa_r^2}{2\kappa_h^2}B_{221}\right),$$

$$\kappa_r = \frac{R_0}{R_1}, \quad \kappa_h = \frac{h}{R_1}.$$

Тривалість τ_1 стадії зняття перегріву розплаву отримаємо

$$\tau_1 = \frac{\ln\theta_{10}}{\omega},$$

поклавши в ліву частину співвідношення (17) $\theta = 1$.

Переміщення фронтів кристалізації

Для обчислення переміщення в часі фронтів, що розмежовують рідке ядро виливка та його затверділі ділянки наведемо встановлені у роботі [2] формули, які здійснюють зв'язок між часом τ, іншими визначальними параметрами процесу та відповідними координатами фронтів – функціями ξ_0, ξ_1, ζ:

$$y = f(x, B, L) = c_1x + c_2x^2 + c_3\ln(1+xB), \qquad (18)$$

$$c_1 = \frac{1}{B}\left(L + \frac{1}{2}\right), \quad c_2 = \frac{1}{2}Bc_1, \quad c_3 = -\frac{1}{2B^2};$$

$$y = f_i(x, B, L) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4\ln(1+xB), \qquad (19)$$

$$c_1 = \frac{1}{B}\left(L + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6B^2}, \quad c_2 = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2B}\left(L + \frac{1}{6}\right),$$

$$c_3 = \frac{1}{3}\left(L + \frac{1}{6}\right), \quad c_4 = -\frac{1}{2B^2}\left(1 - \frac{1}{3B}\right);$$

$$y = f_o(x, B, L) = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4\ln(1+xB), \qquad (20)$$

$$c_1 = \frac{1}{B}\left(L + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6B^2}, \quad c_2 = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2B}\left(L + \frac{1}{6}\right),$$

$$c_3 = -\frac{1}{3}\left(L + \frac{1}{6}\right), \quad c_4 = -\frac{1}{2B^2}\left(1 + \frac{1}{3B}\right).$$

Щоб за допомогою виписаних формул (18) – (20) знайти значення координат фронтів ξ_0, ξ_1, ζ як функцій часу τ, необхідно кожне із співвідношень

$$\tau = f_i(\xi_0, B_{01}, L_0), \quad \tau = f_o(\xi_1, B_{21}, L_1),$$
$$\tau = f(\zeta, B_{221}, L_1) \qquad (21)$$

обернути відносно відповідно ξ_0, ξ_1 та ζ.

Зазначимо, що формули (18) – (20) надають можливість визначити і інші параметри процесу кристалізації виливка, які представляють інтерес. Наприклад, тривалість цього процесу τ_2 обчислюється наступним чином. Оскільки через різницю в геометричних характеристиках та через різні ж теплофізичні властивості виливка в радіальному та осевому напрямках можуть виявитися різними і швидкості кристалізації виливка в зазначених напрямках, то слід врахувати ці можливості при знаходженні значення величини τ_2. Для цього необхідно спочатку знайти розв'язок нелінійного рівняння

$$f_i(\xi, B_{01}, L_0) - f_o(\xi, B_{21}, L_1) = 0,$$

відносно невідомої величини ξ, яка за фізичним змістом є координатою зустрічі фронтів ξ_0 та ξ_1, а потім, підставивши це значення ξ в перше чи друге з рівнянь (21), обчислити величину τ; ще одне значення цього параметра слід обчислити за допомогою третього рівняння (21), підставивши в його праву частину $\zeta = h$. Менше із двох обчислених значень τ і є тривалість τ_2 процесу кристалізації виливка.

При вивченні кінетики процесу твердіння виливка інколи виникає потреба в визначенні не тільки переміщення фронтів ξ_0, ξ_1 і ζ, а і їх швидкостей u_0, u_1 і u, які знаходяться за допомогою диференціювання за часом вказаних переміщень, тобто

$$u_0 = \dot{\xi}_0, \quad u_1 = \dot{\xi}_1, \quad u = \dot{\zeta}.$$

Оскільки операція диференціювання труднощів не представляє, наведемо тут для прикладу явний вираз для однієї із перелічених швидкостей

$$u_1 = \left(\frac{d}{d\xi_1} f_o(\xi_1, B_{21}, L_1) \right)^{-1}. \qquad (22)$$

Решта швидкостей, u_0 і u, знаходяться за цілком аналогічними формулами.

Охолодження виливка в кокілі

Процес охолодження виливка після повного затвердіння триває і тому подальше його перебування в кокілі супроводжується пониженням температури, яка визначається в результаті розв'язку крайової задачі (6) – (8). Для отримання явного виразу функції θ_1 на часовому проміжку $\tau_2 < \tau < \tau_3$ введемо у розгляд дві повні ортонормовані системи функцій $\{\varphi_m(r)\}_{m=1}^{\infty}$ та $\{\psi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, кожна з яких є розв'язком відповідної задачі Штурма – Ліувілля. Щоб не наводити повторно міркування, пов'язані зі знаходженням розв'язку цієї задачі, умовимось використовувати такі позначення, які містять майже повну інформацію щодо застосованих в даній роботі задач Штурма – Ліувілля; отже, позначення (w – вагова функція)

$$SL(M\,y, a, b; C_a, C_b; w), \qquad (23)$$

означає знаходження розв'язку y звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$M\,y = 0, \qquad (24)$$

на інтервалі (a, b), який (розв'язок) задовольняє граничні умови (штрихом позначено похідну функції за її незалежною змінною)

$$y' + C_a\,y = 0 \text{ при } x = a, \qquad (25)$$

$$y' + C_b\,y = 0 \text{ при } x = b, \qquad (26)$$

де C_a та C_b – сталі величини. Додатково встановлюється характеристичне рівняння для визначення власних чисел задачі та оговорюється нормування y.

З урахуванням позначень (23) – (26) можна вказати, що перша послідовність $\{\varphi_m(r)\}_{m=1}^{\infty}$ відповідає такій задачі Штурма – Ліувілля

$$SL(M_1\varphi, R_0, R_1; -B_{01}, B_{21}; r), \qquad (27)$$

де $M_1\varphi$ – рівняння Бесселя

$$\ldots \qquad M_1\varphi = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \mu^2\varphi = 0, \qquad (28)$$

причому значення параметра μ визначаються далі з трансцендентного рівняння (33) як його дійсні додатні корені.

Можна показати [4], що $\varphi(r)$ визначається за формулами

$$\varphi(r) = N_\varphi(\mu)\{Y_0(\mu r)[J]_{R_0} - J_0(\mu r)[Y]_{R_0}\}, \qquad (29)$$

$$\left(N_\varphi(\mu)\right)^{-2} = \int_{R_0}^{R_1} r\varphi^2(r)dr =$$

$$= \frac{R_1^2}{2}\varphi^2(R_1)\left(1 + B_{21}^2\right) - \frac{R_0^2}{2}\left(1 + B_{01}^2\right),$$

(30)

$$[J]_{R_0} = \mu J_1(\mu R_0) - B_{01}J_0(\mu R_0), \qquad (31)$$

$$[Y]_{R_0} = \mu Y_1(\mu R_0) - B_{01}Y_0(\mu R_0), \qquad (32)$$

де через $J_n(x)$, $n = 0, 1,$ – позначено функції Бесселя першого роду порядку n, а через $Y_n(x)$, $n = 0, 1,$ – функції Вебера порядку n.

Рівняння для обчислення послідовності власних чисел μ_m, $m = 1, 2, \ldots$, допускає представлення його у вигляді співвідношення

$$[J]_{R_0}[Y]_{R_1} - [J]_{R_1}[Y]_{R_0} = 0, \qquad (33)$$

де вирази $[J]_{R_1}$ і $[Y]_{R_1}$ визначаються за формулами (30) і (31), у яких R_0 та B_{01} слід замінити, відповідно, на R_1 та B_{21}. При цьому кожній функції послідовності $\{\varphi_m(r)\}_{m=1}^{\infty}$ відповідає конкретне значення μ_m.

Дещо простішою виглядає задача Штурма – Ліувілля по знаходженню послідовності $\{\psi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$

$$SL(M_2\psi, 0, h; 0, B_{221}; 1), \qquad (34)$$

де $M_2\varphi$ – диференціальне рівняння

$$M_2\psi = \frac{d^2\psi}{dz^2} + \nu^2\psi = 0, \qquad (35)$$

значення параметра ν визначаються далі як дійсні додатні корені трансцендентного рівняння (38).

Неважко бачити, що $\psi(z)$ визначається за формулами

$$\psi(z) = N_{\psi}(\nu) \cos \nu z\,, \qquad (36)$$

$$\left(N_{\psi}(\nu)\right)^{-2} = \int_0^h \psi^2(z)dz = \frac{h}{2}\left(1 + \frac{\sin 2\nu h}{2\nu h}\right). \qquad (37)$$

Відносно простим є і рівняння для знаходження власних чисел ν_n, $n = 1, 2, \ldots$

$$B_{221} - \nu \operatorname{tg} \nu h = 0\,. \qquad (38)$$

Теплове поле виливка при його охолодженні в кокілі на часовому проміжку $\tau_2 < \tau < \tau_3$ визначається за формулою

$$\theta_1(r,z,\tau) = \theta_c + $$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}\varphi_m(r)\,\psi_n(z)\exp(-\gamma_{mn}\tau)\,, \qquad (39)$$

$$c_{mn} = \int_{R_0}^{R_1}\int_0^h r\left(\vartheta(r,z) - \theta_c\right)\varphi_m(r)\,\psi_n(z)drdz\,,$$

$$\gamma_{mn} = \mu_m^2 + \nu_n^2\,,$$

де, нагадаємо, $\vartheta(r,z)$ – відома з умови (8) функція.

Нагрівання кокілю

Визначення температури кокілю на часовому проміжку $0 < \tau < \tau_3$ здійснюється в результаті розв'язку крайової задачі (13) – (15) за прийнятим в попередньому розділі методом і тому принципових труднощів не представляє. В зв'язку з цим, опускаючи подробиці, достатньо навести лише загальну схему визначення функції θ_2 на одному з прямокутників (скажімо, D_{22} для конкретності), які утворюють область D_2.

Вважатимемо, що на лінії s (формула (10)), яка розмежовує згадані прямокутники, виконується та ж гранична умова (формули (14)), що і на сторонах s_1 та s_2.

Далі слід ввести у розгляд дві системи функцій $\{\phi_m(r)\}_{m=1}^{\infty}$ та $\{\chi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$, кожна з яких є розв'язком наступних задач Штурма – Ліувілля

$$SL(M_1\phi,\ R_1,\ R_2;\ -B_{12},\ B_{02};\ r), \qquad (40)$$

$$SL(M_2\chi,\ 0,\ h_1;\ 0,\ B_{02};\ 1), \qquad (41)$$

причому визначення власних чисел μ_m, $m = 1, 2, \ldots$, та ν_n, $n = 1, 2, \ldots$, задач (40) і (41) необхідно провести з урахуванням параметрів, що фігурують у цих співвідношеннях.

Нарешті остаточний вираз для функції θ_{22} можна подати у такому вигляді (подвійний індекс при θ_{22} використано щоб підкреслити, що D_{22} є областю визначення функції)

$$\theta_{22}(r,z,\tau) = \theta_c + $$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}\phi_m(r)\chi_n(z)\exp(-\gamma_{mn}\tau)\,, \qquad (42)$$

$$c_{mn} = \int_{R_1}^{R_2}\int_0^{h_1} r\left(\theta_{20}(r,z) - \theta_c\right)\phi_m(r)\chi_n(z)drdz\,,$$

$$\gamma_{mn} = \mu_m^2 + \nu_n^2\,,$$

де θ_{20} – початкова температура кокілю при $\tau = 0$.

Висновки

Математичне моделювання теплових процесів, що супроводжують виготовлення короткого порожнинного циліндричного виливка методом відцентрового лиття в металевий кокіль, зведено у роботі до розв'язку низки крайових задач теорії теплопровідності. Прийняття неодноразово перевіреної теоретично і експериментально концепції калориметричної температури дозволило не тільки роз'єднати вихідну теплофізичну систему на окремі не взаємозв'язані складові (виливок, кокіль), але і подолати деякі суттєві математичні труднощі.

Отримані результати теоретичного плану можуть бути реалізовані при: проведенні дослідження особливостей перебігу процесів ливарного виробництва за наявності складових різного агрегатного стану; прогнозуванні механічних властивостей майбутнього виробу та його зернистої структури; вивченні особливостей роботи кокілю, його довготривалості та вибору оптимальних розмірів; проведенні розрахунків параметрів ливарного процесу за допомогою ЕОМ.

Список літератури:

1. Баландин Г.Ф. Основы теории формирования отливки [Текст]: моногр./в 2 ч. Ч. 1. Тепловые основы теории. Затвердевание и охлаждение отливки. – М.: Машиностроение, 1976. – 328 с. 2. Вейник А.И. Теория затвердевания отливки. [Текст]: моногр./ – М.: Машгиз, 1960. 436 с. 3. Математичне моделювання процесів твердіння та охолодження порожнинного циліндричного виливка при відцентровому литті в масивний кокіль[Текст]/ Клименко Л.П., Дихта Л.М., Андрєєв В.І.// Комп'ютерні технології. Наук. праці: – Вип. 22. – Т. 35. – Миколаїв: МДГУ ім. П.Могили. – 2004. – С. 59-69. 4. Коренев В.Г. Введение в теорию бесселевых функций [Текст]: моногр./М.: Наука. – 1971. – 287 с. 5. Литье в кокиль[Текст]: моногр./ С. Л. Бураков, А. И. Вейник, Н. П. Дубинин и др. Под ред. А. И. Вейника. —М.: Машиностроение, 1980, 415 с.

Bibliography (transliterated):

1. Balandin G.F. Osnovy teorii formirovanija otlivki [Tekst]: monogr./v 2 ch. Ch. 1. Teplovye osnovy teorii. Zatverdevanie i ohlazhdenie otlivki. – M.: Mashinostroenie, 1976. – 328 s. 2. Vejnik A.I. Teorija zatverdevanija otlivki. [Tekst]: monogr./ – M.: Mashgiz, 1960. 436 s. 3. Matematichne modeljuvannja procesiv tverdinnja ta oholodzhennja porozhninnogo cilindrichnogo vylyvka pry vidcentrovomu lytti v masyvnij kokil'[Tekst]/ Klimenko L.P., Dyhta L.M., Andreev V.I./ Komp'yuterni tekhnolohiyi. Nauk. pratsi: – Vyp. 22. – T. 35. – Mykolayiv: MDHU im. P.Mohyly. – 2004. – S. 59-69./ 4. Korenev V.G. Vvedenie v teoriju besselevyh funkcij [Tekst]: monogr./M.: Nauka. – 1971. – 287 s. 5. Lit'e v kokil'[Tekst]: monogr./ S. L. Burakov, A. I. Vejnik, N. P. Dubinin i dr. Pod red. A. I. Vejnika. — M.: Mashinostroenie, 1980, 415 s.

Надійшла до редакції 10.07.2015 р.

Клименко Леонід Павлович – доктор техн. наук, професор, ректор Чорноморського державного университету ім. Петра Могили, Миколаїв, Україна, e-mail: rector@ chdu.edu.ua

Дихта Леонід Михайлович – доктор техн. наук, професор, професор кафедры прикладної та вищої математики Чорноморського державного университету ім. Петра Могили, Миколаїв, Україна, e-mail: leonid.dykhta@gmail.com

Андреєв В'ячеслав Іванович – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри екології та природокористуванняЧорноморського державного университету ім. Петра Могили, Миколаїв, Україна, e-mail: avi@chdu.edu.ua

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЛИТЬЕ В МЕТАЛЛИЧЕСКИЙ КОКИЛЬ КОРОТКОЙ ПОЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОТЛИВКИ

Л.П. Клименко, Л.М. Дыхта, В.И. Андреев

Произведено математическое моделирование тепловых процессов, связанных со снятием перегрева расплава, затвердеванием и последующим охлаждением полой цилиндрической отливки, изготовленной методом центробежного литья в металлический кокиль. В работе математическое моделирование указанных процессов сведено к решению ряда краевых задач теории теплопроводности. Некоторые из существенных математических трудностей, обусловленных наличием жидкого ядра и движущихся фронтов кристаллизации, или сложной геометрией областей и т.д., преодолены путем привлечения фундаментальной концепции калориметрической температуры, неоднократно подтвержденной как теоретически, так и экспериментально.

THE THERMAL PROCESSES' MATHEMATICAL SIMULATION DURING CASTING INTO METAL MOULD OF THE SHORT HOLLOW CYLINDRICFL CASTING

L.P. Klimenko, L.M. Dykhta, V.I. Andreev

Mathematical simulation is made for thermal processes associated with the removal overheat melt, solidification and subsequent cooling of the short hollow cylindrical casting during its manufacturing by the method of centrifugal casting in metal mould. In the paper the mentioned processes' mathematical simulation is reduced to the solution of a number of boundary-value problems of heat conductivity theory. Some significant mathematical difficulties caused by the presence of liquid core and moving crystallization fronts or by the domains' complicated geometry etc. are overcome by adopting of the fundamental concept of calorimetric temperature, repeatedly validated both theoretically and experimentally.