

УДК 621.43.01

А.А. Тропина, канд. физ.-мат. наук

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДУГОВОГО РАЗРЯДА С ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

### Введение

Воздействие сильных электрических полей на различные газообразные среды приводит к появлению низкотемпературной плазмы. Возможность стационарного существования этого вида самостоятельного электрического разряда является основой все более широкого использования низкотемпературной плазмы в технологических установках. Это и различные виды электродуговых воспламенителей и генераторов плазмы (плазмотронов) и плазменные устройства сжигания отходов, плазменные активаторы топлива и т.д.

Однако работы по усовершенствованию такого рода устройств и проектирование новых тормозятся трудностями, возникающими при проведении экспериментальных исследований, в связи с высокотемпературными режимами, реализующимися при их работе.

В таких условиях одним из основных источников получения информации о поведении низкотемпературной плазмы является математическое моделирование. В настоящей работе приводится математическая модель горения стационарной электрической дуги постоянного тока. На основе разработанной модели был проведен анализ взаимодействия турбулентного потока плазмообразующего газа (воздуха) с низкотемпературной плазмой. Проведены численные расчеты характеристик промышленного плазмотрона, работающего на малых силах тока. Подобные высокоэффективные устройства можно рассматривать в качестве потенциальных источников зажигания и использовать результаты проведенных расчетов при проектировании систем зажигания для

двигателей внутреннего сгорания (при реализации процесса воспламенения смеси в предкамере).

### Анализ последних достижений и публикаций

Общепринятым подходом к моделированию явлений в низкотемпературной плазме является подход, основанный на системе уравнений магнитной газодинамики, (МГД-подход) [1],[2]. Трудности моделирования подобных течений связаны с постановкой граничных условий вблизи электродов, где происходит взаимодействие плазмы с электродом. В большинстве работ для задания граничных условий используются экспериментальные данные о распределении температуры вдоль электродов и радиусы привязки дуги к электродам [3],[4]. При отсутствии подобных экспериментальных данных, так например, при проектировании новых плазменных устройств, использование такого подхода становится невозможным. В данной работе для расчета характеристик электрической дуги предлагается использовать метод, основанный на решении сопряженной задачи, когда в расчетную область, помимо области, занятой плазмой, включаются области, занятые катодом и анодом. Подобный подход использовался авторами работы [5], однако авторы ограничились рассмотрением горения открытой электрической дуги в ламинарном режиме в области сильных токов.

Однако, в связи с развитием энергосберегающих технологий все большее развитие получают плазменные устройства, работающие на малых силах тока (до 10 А). Моделирование таких высокоэффективных потоков плазмы вызывает целый ряд вычислительных проблем, связанных с высокими значениями плотности тока вблизи электродов, особенно для

плазмы молекулярных газов, что при прочих равных условиях может приводить к развитию численной неустойчивости. Поэтому число работ, посвященных их моделированию, является ограниченным и носит, как правило, полуэмпирический характер [6]. Кроме того, остается открытым вопрос о влиянии турбулентности и выбора модели, описывающей турбулентность газового потока, на основные параметры электродуговой плазмы.

**Цель и постановка задачи**

Целью исследования является постановка и решение задачи о взаимодействии турбулентного потока молекулярного газа (воздуха) с низкотемпературной плазмой формирующейся дуги постоянного тока при атмосферном давлении и малых силах тока на основе разработанной математической модели.

Для описания характеристик дуги используется система уравнений МГД-приближения. Предполагается, что протекающие процессы стационарные, течение осесимметричное, излучение объемное, пульсациями электромагнитных величин можно пренебречь. Плазма предполагается квазинейтральной, поскольку длина дебаевского радиуса экранирования намного меньше характерных размеров задачи. Согласно данным, приведенным в работе [7], для дуги, горящей в воздухе при атмосферном давлении, максимальное отклонение между температурой тяжелых частиц и температурой электронов не превышает 1%, что позволило считать плазму, находящейся в состоянии локального термодинамического равновесия (ЛТР-приближение).

Свойства турбулентного течения газа описываются двухпараметрической  $k-\varepsilon$  моделью турбулентности (RNG модификация). Основные уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j v_i + p \delta_{ij} - \tau_{ij}) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + 2\mu_t S_{ij} S_{ij} - \frac{2}{3} (\mu_t S_{nn}^2 + \rho k S_{nn}) - \rho \varepsilon \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left[ 2\mu_t S_{ij} S_{ij} - \frac{2}{3} (\mu_t (S_{nn})^2 + \rho k S_{nn}) \right] - c_2 \frac{\rho \varepsilon^2}{k} + C_3 \rho \varepsilon S_{nn} - R \tag{4}$$

$$\rho(\bar{v} \cdot \nabla) h = \bar{j} \cdot \bar{E} + \nabla \cdot \left( \frac{\lambda \nabla T}{c_p} \right) - \psi + \tau_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \tag{5}$$

$$\nabla \times \bar{E} = 0, \quad \nabla \times \bar{H} = \bar{j}, \tag{6}$$

$$\bar{j} = \sigma(\bar{E} + \bar{v} \times \mu_E \bar{H}), \tag{7}$$

$$R = \rho C_\mu \frac{\eta^3 (1 - \eta/\eta_0) \varepsilon^2}{(1 + \beta \eta^3) k}, \quad \tau_{ij} = \tau_{lij} + \tau_{tij},$$

$$\tau_{lij} = 2\mu \left( S_{ij} - \frac{S_{nn} \delta_{ij}}{3} \right), \quad \mu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad R = S k / \varepsilon, \quad S = \sqrt{2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}},$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

где  $v_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) – компоненты вектора скорости  $\bar{v}$ ,  $\tau_{lij}(\tau_{tij})$  – тензор молекулярных (турбулентных) напряжений,  $\mu_t(\mu)$  – турбулентная (молекулярная) вязкость,  $k$  – кинетическая энергия турбулентности,  $h$  – энтальпия,  $p$  – давление,  $\bar{H}$  – вектор магнитной индукции,  $\bar{E}$  – вектор напряженности электрического поля,  $\sigma$  – проводимость среды,  $\bar{j}$  – вектор плотности тока,  $\mu_E$  – магнитная проницаемость среды,

$S_{ij}$  – тензор скоростей деформации,  $\varepsilon$  – скорость диссипации кинетической энергии турбулентности,

Дополнительные члены в уравнении энергии (5) представляют собой джоулево тепловыделение, работу сил Лоренца и потери тепла  $\psi$ , связанные с излучением дуги. Уравнения (6)-(7) представляют собой систему уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Рассматривается электрическая дуга, горящая в канале плазмотрона при атмосферном давлении. В качестве плазмообразующего газа используется воздух. Поскольку избыточное давление, создаваемое электромагнитными силами в электрической дуге незначительно по сравнению с атмосферным [7], то его влиянием на теплофизические коэффициенты можно пренебречь. Таким образом, коэффициенты теплопроводности  $\lambda$  и проводимости  $\sigma$  считались известными функциями температуры и задавались с использованием линейнокусочной интерполяции экспериментальных данных, приведенных в монографии [1].

Так как большинство конструкций плазмотронов обладает осесимметричной геометрией, задача рассматривалась в осесимметричном приближении. Тогда, используя закон Ампера и Ома, уравнения Максвелла (6)-(7) могут быть сведены к одному уравнению для азимутальной компоненты магнитной индукции  $H_\varphi$ .

Система уравнений (1)-(7) дополняется следующими граничными условиями:

1) на внешней границе катода:

$$T_c = 300^0 K, H_\varphi = \frac{Ir}{2\pi r_c^2}, u = v = 0,$$

2) на внешней границе анода:

$$T_a = 300^0 K, H_\varphi = \frac{Ir}{2\pi r_a^2}, u = v = 0,$$

3) во входном сечении:

$$T_a = 300^0 K, G = G_0, H_\varphi = \frac{I}{2\pi r},$$

где  $G$  – массовый расход воздуха на входе в плазмотрон.

На твердых стенках ставятся условия прилипания, а на оси при  $r = 0$  выполняются условия симметрии.

В тонких слоях шириной порядка  $10^{-8}$  м, непосредственно примыкающих к электродам, происходит нарушение локального термодинамического равновесия плазмы, и плазма становится неравновесной. Именно в этих слоях нарушается и тепловое, и ионизационное равновесие плазмы, и происходит основное падение потенциала. Учет всего многообразия эффектов, происходящих в приэлектродных слоях, является достаточно сложной самостоятельной задачей [2].

В тоже время основные численные проблемы, возникающие при рассмотрении процесса формирования дуги при малых силах тока, напрямую связаны с тем, что использование приближения локального термодинамического равновесия вблизи электрода, а соответственно и значения проводимости, как функции температуры тяжелых частиц, приводит к развитию численной неустойчивости [9]. В связи с этим многие исследователи отмечают невозможность численного расчета дуги при малых силах тока в приближении ЛТР.

В данной работе учет отклонения состояния плазмы от ЛТР вблизи катода производится путем введения в приэлектродных ячейках эффективной проводимости, значение которой определяется путем организации соответствующего итерационного процесса (в рамках основной схемы расчета).

Для этого в предположении постоянства температуры электронов  $T_e$  по толщине ионизационного слоя определяется квазиравновесный состав плазмы и определяется величина ионного тока. По известной

в процессе основного расчета температуре стенки определяется ток эмиссии электронов по закону Ричардсона (на первой итерации без поправки Шоттки):

$$j_e = AT_w^2 \exp\left(-\frac{e\varphi_{ef}}{k_B T_w}\right), \quad (8)$$

где  $A$  – константа Ричардсона,  $e$  – заряд электрона,  $\varphi_{ef} = \varphi - \Delta\varphi$ ,  $e\varphi$  – работа выхода,  $\Delta\varphi = \sqrt{eE_c}$  – поправка Шоттки,  $k_B$  – константа Больцмана,  $E_c$  – значение напряженности электрического поля. В расчетах используется усредненное по поверхности катода значение эмиссионного тока, а именно

$$\tilde{j}_e = \frac{2 \int_0^{r_c} j_e(r) dr}{r_c^2}, \quad (9)$$

где  $j_e(r)$  определяется соотношением (8),  $r_c$  – радиус вставки.

Из баланса энергии в ионизационном слое определяется катодное падение потенциала  $U_c$ :

$$U_c = \frac{j_i \chi_i}{\tilde{j}_e}, \quad (10)$$

где  $\chi_i$  – потенциал ионизации газа, в котором горит дуга.

Для определения значения напряженности электрического поля используется закон Чайлда-Ленгмюра:

$$E_c = 5700 \cdot W^{1/4} U_c^{1/4} j_i^{1/2}, \quad (11)$$

где  $W$  – атомный вес плазмообразующего газа. На последнем этапе вычисляется значение эффективной проводимости  $\sigma_e$  в приэлектродной зоне

$$\sigma_e = \frac{\tilde{j}_e}{E}. \quad (12)$$

Расчеты были проведены для промышленного плазмотрона с составным катодом, состоящим из

гафниевой вставки и медной основной части и медного (стального анода). Решение системы дифференциальных уравнений (1)-(7) проводилось методом конечных разностей в физических переменных. Дискретизация уравнений осуществлялась методом контрольного объема, при этом конвективные члены аппроксимировались разностями, ориентированными против потока. Поле давления рассчитывалось с помощью метода SIMPLE.

Расчетная область включает в себя твердые тела (катод, анод) и область, занятую газом и плазмой. Решение разностных уравнений осуществлялось итерационным методом. При решении задачи в области, занятой составным катодом, состоящим из гафниевой вставки, медной части и изолятора, исходная область разбивалась на три части, в каждой из которых использовались теплофизические свойства конкретного материала. При этом моделирование джоулевого тепловыделения осуществлялось с учетом линейной зависимости коэффициентов электропроводности отдельных частей катода от температуры. В рамках основного итерационного цикла для расчета эффективной проводимости в прикатодных ячейках на каждой итерации проводились дополнительные итерации согласно методике, приведенной выше.

### Результаты расчетов

Использование предложенного подхода позволило провести расчеты параметров дуги для силы тока от 4 А до 30 А при варьировании расхода газа на входе в плазмотрон от 0.1 г/с до 1 г/с (угол закрутки газа  $45^\circ$ ).

На предварительном этапе исследовались зависимости приэлектродной проводимости и катодного падения потенциала, рассчитанные по соотношениям (10), (12), от температурных характеристик горения разряда.

На рис.1. представлены зависимости эффективной проводимости  $\sigma_e$  в прикатодных ячейках от температуры катода для различных значений температуры электронов  $T_e$ .

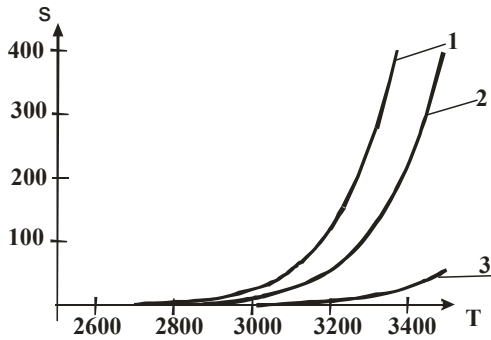


Рис.1. Зависимости эффективной проводимости от температуры катода для различных значений  $T_e$ :  
 1 -  $T_e = 0.5 \text{ eV}$ , 2 -  $T_e = 1 \text{ eV}$ , 3-  $T_e = 2 \text{ eV}$

Можно отметить увеличение проводимости с ростом температуры катода, что связано с ростом тока эмитирующих электронов. В тоже время увеличение температуры электронов приводит к снижению  $\sigma_e$ , что связано с увеличением доли ионного тока и ростом напряженности электрического поля в ионизационном слое. Если оценивать значение приэлектродной проводимости в рамках ЛТР плазмы, то ее значение по данным монографии [1], при тех же условиях, на 1-2 порядка выше.

Поскольку к основным энергетическим характеристикам плазмотрона относят прежде всего катодное падение потенциала  $U_c$ , экспериментальное определение которого, при малых силах тока весьма затруднено, был проведен расчет  $U_c$  при различных значениях разрядного тока  $I$ . Соответствующая зависимость  $U_c = U_c(I)$  приведена на рис.2, который иллюстрирует снижение катодного падения потенциала с ростом разрядного тока, что согласуется с известными экспериментальными данными [2].

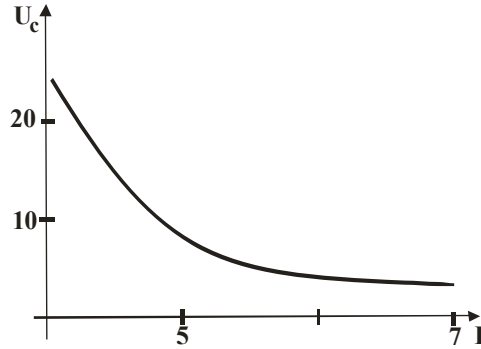
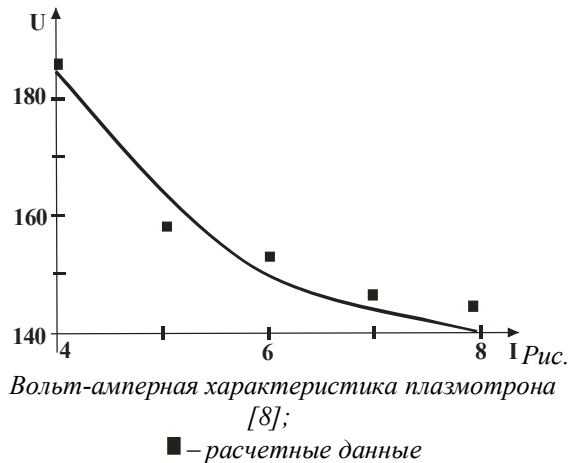


Рис.2. Катодное падение потенциала в зависимости от силы разрядного тока

Этот процесс напрямую связан с увеличением тока термоэмиссии  $j_e$ , поскольку при постоянном давлении газа величина ионного тока  $j_i$  является примерно постоянной величиной. При этом диапазон изменения  $U_c$  при силе тока  $I = 5 - 10 \text{ A}$  варьируется в пределах 5-20 В. Поскольку экспериментальные данные о катодном падении потенциала для данного плазмотрона в литературе отсутствуют, верификация данных расчета была проведена путем сравнения экспериментальных и расчетных вольтамперных характеристик (рис.3), причем расчет напряжения проводился с учетом величины  $U_c$ . Можно отметить удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных.



3. Вольт-амперная характеристика плазмотрона [8];  
 ■ - расчетные данные

Что касается всей области горения дугового разряда, то результаты расчетов показали, что форми-

рующаяся электрическая дуга состоит из плазменного ядра, непосредственно примыкающего к вставке, и основной области, непосредственно граничащей с турбулентным потоком газа.

Интенсивность джоулева тепловыделения оценивалась с помощью безразмерного параметра

$$I_d = \frac{\sigma_0 E_0^2 d_0}{\rho_0 v_0 T_0}.$$

При варьировании силы тока в пределах от 1А до 30А, при следующих характерных значениях температуры, плотности, скорости, проводимости, напряженности электрического поля:

$$T_0 = 6000^0 K, \rho_0 = 0.044 \text{ кг/м}^3, v_0 = 5 \text{ м/с},$$

$$\sigma_0 = 80 (\text{ом}\cdot\text{м})^{-1}, E_0 = I/(\pi d_0^2 \sigma_0),$$

параметр  $I_d$  варьировался в пределах  $376 \leq I_d \leq 7.5 \cdot 10^5$ . В качестве характерного линейного размера был выбран диаметр вставки  $d_0 = d_c = 0,002 \text{ м}$ .

При увеличении параметра  $I_d$  увеличивается максимум температур в районе вставки, и происходит расширение токопроводящего канала дуги. Кроме того, под действием собственных электромагнитных сил дуга удлиняется в аксиальном направлении, и, начиная с  $I_d = 1,5 \cdot 10^5$ , при малых расходах газа дуга занимает практически весь канал плазмотрона. Этот эффект связан не только с увеличением джоулева тепловыделения с ростом силы тока, но и с невозможностью ограничения роста диаметра дуги аксиальным потоком газа в связи с малыми расходами.

Результаты расчетов показали, что увеличение расхода газа на входе в плазмотрон, при прочих равных условиях, приводит к ускорению газового потока в осевом направлении. Как следствие, зона прогрева газа дугой в аксиальном направлении увеличивается практически пропорционально параметру

$G_{in} = G/G_0$ , где  $G$  – расход газа во входном сечении,  $G_0 = 0,1 \text{ г/с}$ . При этом вблизи анода температура начинает падать. Этот эффект наглядно демонстрируется радиальными профилями температур в осевых сечениях, приведенными на рис. 4, для случая  $I_d = 6 \cdot 10^3$  и разных значений параметра  $G_{in}$ .

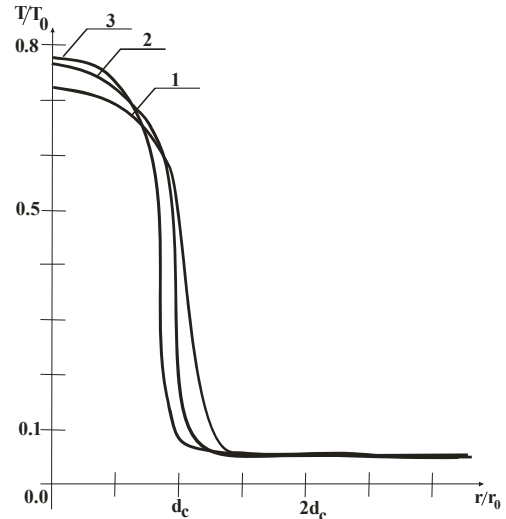


Рис.4. Радиальные профили температур:  
1 –  $G_{in} = 1$ ; 2 –  $G_{in} = 2$ ; 3 –  $G_{in} = 4$ .

При больших расходах газа ( $G_{in} \geq 10$ ) газовый поток начинает оттеснять дугу от анода, наблюдается процесс газодинамического обжатия столба дуги, что приводит к ограничению роста ее диаметра, и смещению вниз по потоку переходной области взаимодействия дуги с турбулентным потоком газа. На рис.5 представлена зависимость максимальной температуры на оси плазмотрона от силы разрядного тока (параметра  $I_d$ ) при  $G_{in} = 1$ . Можно отметить практически линейный рост максимальной температуры на оси дуги с ростом тока.

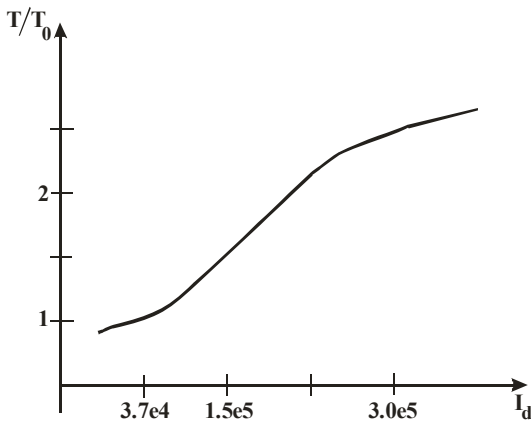


Рис. 5. Зависимость максимальной температуры на оси дуги от силы разрядного тока

Проведенные расчеты позволяют оценить температуру на выходе из плазмотрона, что является особенно важным при использовании подобного рода устройств в качестве источников зажигания. Радиальные профили температуры в выходном сечении плазмотрона при различных значениях параметра  $I_d$  приведены на рис.6. Переходя к размерным переменным, получаем, что даже при относительно малой силе тока ( $I = 4A$ ) значение максимальной температуры на выходе ( $T = 1250^0 K$ ) превышает температуру воспламенения обедненной метановоздушной смеси.

Что касается взаимодействия формирующейся дуги с турбулентным потоком газа, то для оценки такого взаимодействия был проведен анализ использования различных моделей турбулентности. Следует отметить, что с ростом силы тока наблюдается усиление интенсивности турбулентности на границе газ-плазма, где находится основной источник генерации турбулентных вихрей. Именно в этой области и фиксируются максимальные расхождения в значениях кинетической энергии турбулентности, вычисленные с использованием различных моделей турбулентности.

Так, на рис.7 представлены радиальные профили кинетической энергии турбулентности в различных аксиальных сечениях вдоль оси канала для RNG  $k - \epsilon$  модели турбулентности и модели напряжений Рейнольдса.

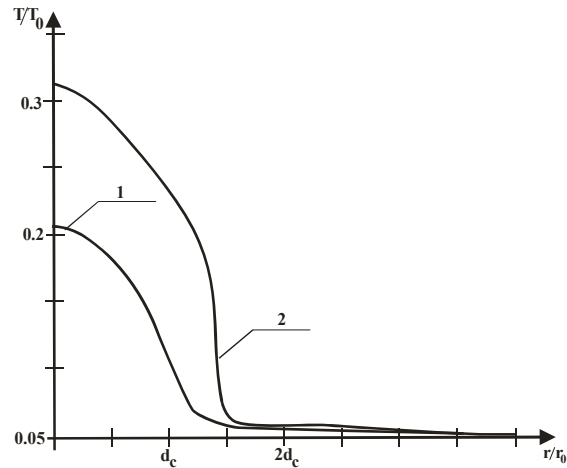


Рис. 6. Профили температур на выходе из плазмотрона:

$$1 - I_d = 1.5 \cdot 10^3, \quad 2 - I_d = 4 \cdot 10^3$$

Расчеты, проведенные с использованием модели напряжений Рейнольдса, показывают более высокий уровень генерации кинетической энергии турбулентности, и, как следствие, более увеличенную зону прогрева газа дугой.

Можно отметить и тот факт, что значения кинетической энергии турбулентности, вычисленные с использованием двух моделей, не совпадают и в области, непосредственно примыкающей к катодной вставке, однако на результатах теплового расчета дуги это не сказывается. Значения максимума температур в районе вставки совпадают для всех моделей турбулентности, что является следствием процесса ламинаризации потока в этой области, где существенными оказываются процессы не турбулентного, а молекулярного переноса.

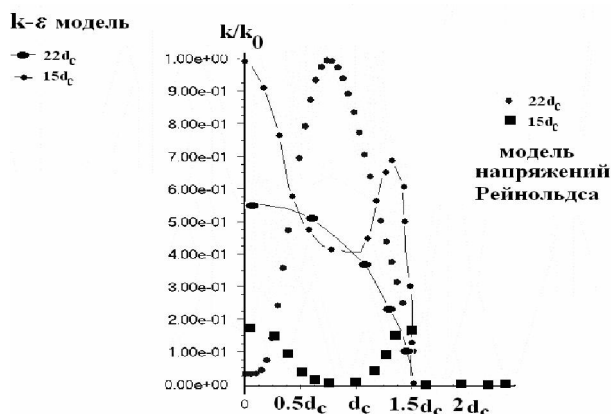


Рис. 7. Радиальные профили кинетической энергии турбулентности

### Выводы

1. Представленная модель стационарного горения дуги при атмосферном давлении и малых силах тока позволяет как на качественном, так и на количественном уровне описать основные закономерности поведения низкотемпературной плазмы и ее взаимодействие с турбулентным потоком газа.

2. Обнаруженные расхождения в расчетах кинетической энергии турбулентности по различным моделям требуют дальнейшей верификации применимости моделей турбулентности к описанию высокотемпературных потоков.

3. Для проведения расчетов и выработки рекомендаций по усовершенствованию более высокоэффективных плазменных систем, работающих на токах менее 1А, необходимо дальнейшее усовершенствование модели, что напрямую связано с учетом не-

равновесных процессов, происходящих во всем межэлектродном промежутке.

### Список литературы:

1. Энгельшт В.С., Гурович В.Ц. и др. Теория столба электрической дуги. Низкотемпературная плазма. Т.1. Новосибирск: Наука, 1990. 376 с.
2. Паневин И.Г., Хвезюк В.И. и др. Теория и расчет приэлектродных процессов. Низкотемпературная плазма. Т.10. Новосибирск: Наука, 1992. 197 с.
3. Aithal S.M., Subramaniam V.V. Numerical model of a transferred plasma arc// J. of Appl. Physics. 1998. V.84. N7. P. 3506-3517.
4. Yuan X., Li h., Zhao T., Wang F. Comparative study of flow characteristics inside plasma torch with different nozzle configurations// Plasma chemistry and plasma processing. 2004. V.24. N 4. P. 585-601.
5. Лелевкин В.М., Семенов В.Ф. Численное моделирование открытой диафрагмированной электрической дуги// Вестник КРСУ. №22. 2002. С. 25-34.
6. Risasher A., Larigaldie S., Bobillot G. Modelling of a steady low-current arc discharge in air at atmospheric pressure// IEEE Trans. Plasma Science. 2000. V. 28. P. 189-192.
7. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 592 с.
8. Романовский Г.Ф., Сербин С.И. Плазмохимические системы судовой энергетики. Николаев: Изд-во УГМТУ, 1998. 246 с.
9. Тропина А.А., Костюк В.Е.. Численный анализ характеристик дуги в турбулентном потоке газе // Авиационно-космическая техника и технология. №9(35). 2006. С. 157-161.